



TITLE:

# インフレーションと企業負債 (パート2) (不確実性と意思決定の数理)

AUTHOR(S):

伊藤, 翔; 宮崎, 浩一

---

CITATION:

伊藤, 翔...[et al]. インフレーションと企業負債 (パート2) (不確実性と意思決定の数理). 数理解析研究所講究録 2009, 1636: 201-208

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140481>

RIGHT:

## インフレーションと企業負債 (パート 2)

伊藤翔, 宮崎浩一  
電気通信大学 システム工学科

(パート 2) の構成は, 次の通り. 節 1 では, にパート 1 に示した定理から, クレジット・スプレッドに関連する評価式を導出し, 相関構造 (企業価値, インフレ, 実質金利) に対する感応度分析を与える. 節 2 では, 発行企業の財務構造を考慮しないケースにおけるインフレデリバティブの評価式の導出と感応度分析を試みる. 節 3 では, 企業の財務構造を明示的に採り上げ, インフレデリバティブの発行可能性やデフォルトリスクも考慮に入れたインフレデリバティブの評価法の提案と提案モデルに基づく感応度分析を与える. 最終節では, まとめと今後の課題を与える.

### 1. クレジット・スプレッド

#### 1.1 クレジット・スプレッドの評価式

ここでは本モデルに基づく名目クレジット・スプレッドと実質クレジット・スプレッドなどを提示する. 時点  $t$  において満期  $T$  の名目国債, インフレ連動国債, 名目社債, インフレ連動社債の利回りを, 順に,  $Y_{P(t,T)}$ ,  $Y_{\bar{P}(t,T)}$ ,  $Y_{F(t,T)}$ ,  $Y_{\bar{F}(t,T)}$  とする.

名目クレジット・スプレッド

$$Y_{F(t,T)} - Y_{P(t,T)} = -\frac{\ln(F(t,T)/K)}{T-t} - \left( -\frac{\ln(P(t,T))}{T-t} \right) = -\frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{F(t,T)}{KP(t,T)} \right)$$

実質クレジット・スプレッド

$$Y_{\bar{F}(t,T)} - Y_{\bar{P}(t,T)} = -\frac{\ln(\bar{F}(t,T)/K)}{T-t} - \left( -\frac{\ln(\bar{P}(t,T))}{T-t} \right) = -\frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{\bar{F}(t,T)}{K\bar{P}(t,T)} \right)$$

名目クレジット・スプレッドに内在するインフレ率の影響 (内在インフレ率)

$$\begin{aligned} & (Y_{F(t,T)} - Y_{P(t,T)}) - (Y_{\bar{F}(t,T)} - Y_{\bar{P}(t,T)}) \\ &= -\frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{F(t,T)}{KP(t,T)} \right) - \left( -\frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{\bar{F}(t,T)}{K\bar{P}(t,T)} \right) \right) = -\frac{1}{T-t} \ln \left( \frac{F(t,T) \bar{P}(t,T)}{\bar{F}(t,T) P(t,T)} \right) \end{aligned}$$

#### 1.2 クレジット・スプレッドの感応度分析

詳細な感応度分析に関しては Ito and Miyazaki(2008)を参照して頂くこととし, ここでは, 企業資産プロセスとインフレ率プロセス間の相関係数  $\rho_{S\pi}$  が, 名目クレジット・スプレッドと実質クレジット・スプレッドに与える影響を検討する. 分析設定としては, 企業資産の初期値, 企業負債の額面をそれぞれ 100, 90 とし, モデルのパラメータは, BX の株式価値プロセスに関する部分を企業価値プロセスに関するものとして適用し, 分析対象となる相関係数部分のみを  $-0.3$  から  $+0.3$  まで  $0.1$  刻みで変化させて名目クレジット・スプレッド

と実質クレジット・スプレッドに与える感応度を確認する。社債の満期に関しては、1年から10年まで1年刻みとする。名目クレジット・スプレッドと実質クレジット・スプレッドの相関係数 $\rho_{S\pi}$ に関する感応度をそれぞれ図1、図2に示した。

### 分析結果

名目クレジット・スプレッドは企業資産プロセスとインフレプロセスの相関が正になるに従って増加するのに対し、実質クレジット・スプレッドは企業資産プロセスと金利プロセスの相関が負になるに従って増加する。

### 分析結果の考察

名目・実質クレジット・スプレッドは名目国債、インフレ連動国債、名目社債、インフレ連動社債の相関に対する価格の変動により分析できる。名目クレジット・スプレッドは名目国債、名目社債から分析できる。相関 $\rho_{S\pi}$ においては、相関の上昇に対しパートIで定義される名目国債価格は上昇する。また株式のパラメータである $\sigma_{i_s}^2$ が上昇することで、株式価値が上昇し、それによって名目社債価値は低下する。これらの変化により図1のように名目クレジット・スプレッドは相関の高いところで広がる。同様の分析を実質クレジット・スプレッドで行う場合はインフレ連動国債とインフレ連動社債に注目すればよい。相関 $\rho_{S\pi}$ についてはインフレ連動国債は変化が無く、インフレ連動社債の価格は上昇する(パラメータ $\sigma_{\pi}^2$ が低下する)。これらによって実質クレジット・スプレッドが図2のようになる

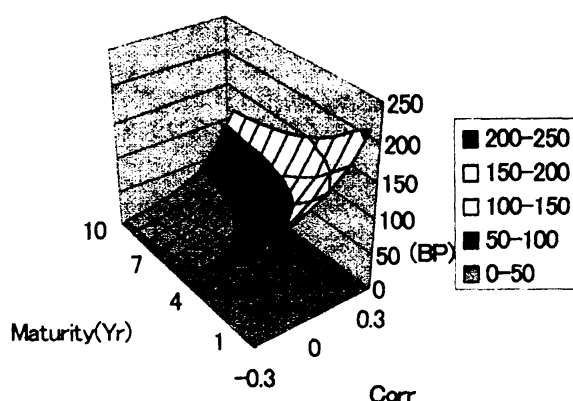


図1 相関 $\rho_{S\pi}$ を変化させたときの名目CS

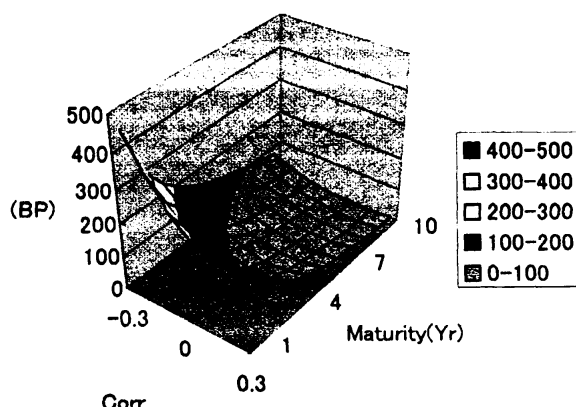


図2 相関 $\rho_{S\pi}$ を変化させたときの実質CS

## 2. デフォルト無インフレデリバティブの評価と感応度分析

### 2.1 デフォルト無インフレデリバティブの評価

ここでは、単純にプライシングカーネルを利用したインフレデリバティブの評価を行う。本研究の評価対象となるインフレデリバティブは、インフレ率と額面をかけたものが額面を上回る部分に関する

ペイオフ $\left(K \frac{\Pi_T}{\Pi_t} - K\right)^+$ が満期時に支払われるものとする。よって、名目社債の評価と同様に、

このペイオフにプライシングカーネルを乗じて期待値を取れば、インフレデリバティブの価格

$f(t, T)$  が式(1)のように与えられる.

$$f(t, T) = E_t \left[ \frac{M_T / M_t}{\Pi_T / \Pi_t} \left( K \frac{\Pi_T}{\Pi_t} - K \right)^+ \right] = K \left[ \bar{P}(t, T) \Phi \left( \frac{\ln(B_z(t, T)) + \frac{1}{2} \sigma_z^2}{\sigma_z(t, T)} \right) - P(t, T) \Phi \left( \frac{\ln(B_z(t, T)) - \frac{1}{2} \sigma_z^2}{\sigma_z(t, T)} \right) \right] \quad (1)$$

ここで, 記法は全て(パート1)に同じである.

(証明) Ito and Miyazaki(2008)を参照されたい.

## 2.2 デフォルト無インフレデリバティブの感応度分析

デフォルト無インフレデリバティブの価格が, 企業資産プロセスと金利プロセスとの間の相関係数  $\rho_{sr}$  に関してどのような感応度を持つかについて検討する. 他の相関係数に関する感応度分析については Ito and Miyazaki(2008)を参照されたい. 分析設定は, 節 1.2 に同じである.

### 分析結果

感応度分析の結果(図3を参照)から, 相関係数  $\rho_{sr}$  が負の場合にインフレデリバティブの価格は高く, 相関係数が増加するに従ってインフレデリバティブの価格は低下し, ある値(残存期間によって異なる)を超えると増加に転じること, また, 残存期間が長くなると, 相関係数が負の場合にはインフレデリバティブ価格は増加し, 相関係数が正の場合にはインフレデリバティブ価格は減少することが読み取れる.

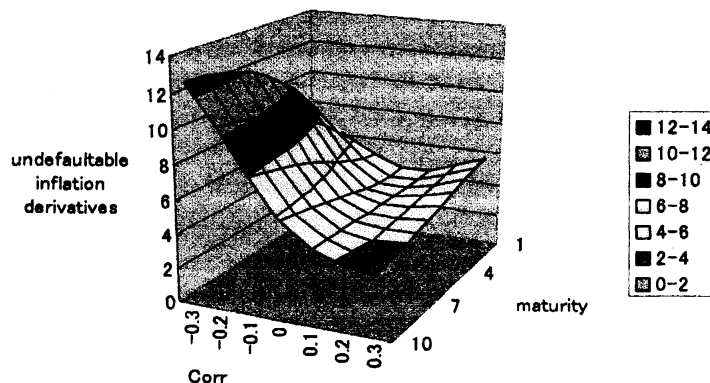


図3 相関  $\rho_{sr}$  を変化させたときのデフォルト無インフレデリバティブ価格

### 分析結果の考察

インフレデリバティブの価格(式(1))に影響を与えるボラティリティ  $\sigma_z(t, T)$ , インフレ連動国債価格の名目国債価格に対する相対的な大きさ(ここでは,  $\bar{P}(t, T) - P(t, T)$  で表す)の相関係数  $\rho_{sr}$  に関する感応度を, それぞれ, 図4, 図5に示した. 図4から, 何れの残存期間においても概して相関係数  $\rho_{sr}$  が正の場合にボラティリティ  $\sigma_z(t, T)$  は大きいことがわかる. ボラティリティの観点だけから判断すると, インフレデリバティブ価格は相関係数  $\rho_{sr}$  が正の場合に高くなるはずであるが, 図3の結果はその逆である. これは, 図5からわかるように, 相関係数  $\rho_{sr}$  が正で大きくなると, インフレ連動国債価格の名目国債価

格に対する相対的な大きさが極めて小さくなり、ボラティリティ  $\sigma_z(t, T)$  の影響とインフレ連動国債価格の名目国債価格に対する相対的な大きさの影響とのトレード・オフにおいて後者の影響が大きく表れるからである。

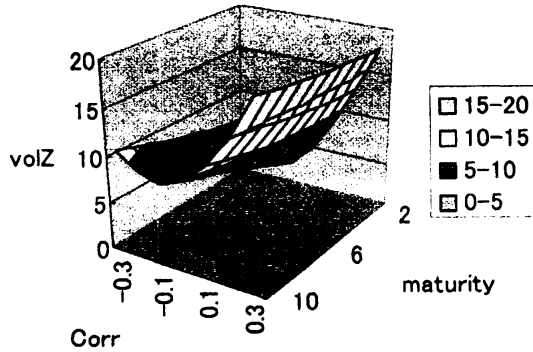


図4 ボラティリティ  $\sigma_z(t, T)$

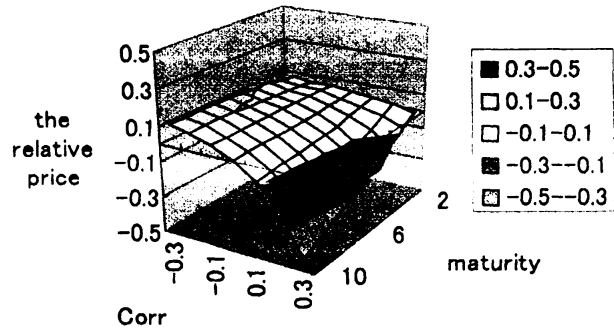


図5 相対的な価格差  $\bar{P}(t, T) - P(t, T)$

### 3. デフォルト有インフレデリバティブの評価と感応度分析

#### 3.1 デフォルト有インフレデリバティブの評価

ここでは、企業の財務構造を踏まえ、社債保有者、株式保有者の誘引両立条件を導入してデフォルト有インフレデリバティブの評価を行う。つまり、現在の社債と株式から成る企業の財務構造の下で、インフレデリバティブを発行した場合に、既存の社債価値と株式価値の両方の増加が見込めなければ、社債保有者と株式保有者はインフレデリバティブの発行を認めないことを前提とした評価法である。

図6の左側、右側には、それぞれ、インフレデリバティブ発行前、後の企業の財務構造を示した。インフレデリバティブ発行前の企業価値、株式価値、社債価値をそれぞれ  $S_t$ ,  $W(t, T)$ ,  $F(t, T)$  で表し、インフレデリバティブ発行後の企業価値、株式価値、社債価値をそれぞれ  $S_t + f(t, T)$ ,  $W'(t, T)$ ,  $F'(t, T)$  と表す。ここで、 $f(t, T)$  はインフレデリバティブの発行価格であり、節3.2では取り敢えず節2で求めたデフォルト無インフレデリバティブの価格を想定する。 $f'(t, T)$  はインフレデリバティブの購入者に対する真の価値であり、この価値を得るために少し高めの発行価格  $f(t, T)$  をインフレデリバティブの購入者が支払うことになる。両者の差を

$$dp(t, T) = f(t, T) - f'(t, T) \quad (2)$$

と表す。 $dp(t, T)$  の大半はデフォルトリスクプレミアムであると考えられる。インフレデリバティブ発行前と後の株式価値と社債価値の差を、それぞれ  $\Delta W(t, T)$ ,  $\Delta F(t, T)$  とすると、

$$\Delta W(t, T) = W'(t, T) - W(t, T), \quad \Delta F(t, T) = F'(t, T) - F(t, T)$$

で与えられる。

株式保有者と社債保有者のインフレデリバティブ発行に関する誘引両立条件は式(3)となる。

$$\Delta W(t, T) \geq 0, \quad \Delta F(t, T) \geq 0 \quad (3)$$

$S_t$	$F(t, T)$
	$W(t, T)$

$S_t$	$F'(t, T)$
	$f'(t, T)$
	$W'(t, T)$
$f(t, T)$	

図6 デリバティブ発行前の B/S とデリバティブ発行後の B/S

インフレデリバティブを発行価格  $f(t, T)$  で発行した後の株式価値  $W'(t, T)$  の導出法

株式保有者の満期  $T$  におけるペイオフは  $\left( \tilde{S}_T - K - K \left( \frac{\Pi_T}{\Pi_t} - 1 \right)^+ \right)^+$  となる。ここで、満期  $T$  における

企業価値  $\tilde{S}_T$  の  $\sim$  は、時刻  $t$  において企業価値が  $S'_t = S_t + f(t, T)$  であったものが満期  $T$  まで推移したことを示すためである。このペイオフにプライシングカーネルを乗じて期待値を取れば(式(5)), インフレデリバティブを発行価格  $f(t, T)$  で発行した後の株式価値  $W'(t, T)$  を定理1のように求めることができる。

$$W'(t, T) = E \left[ \frac{M_T / M_t}{\Pi_T / \Pi_t} \left( \tilde{S}_T - K \left( 1 + \left( \frac{\Pi_T}{\Pi_t} - 1 \right)^+ \right) \right)^+ \right] \quad (4)$$

(定理1)

インフレデリバティブを発行価格  $f(t, T)$  で発行した後の株式価値  $W'(t, T)$  は、次式で与えられる。

$$W'(t, T) = S'_t \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S'_t}\right) - \mu_X}{\sigma_Z} - \rho_{XZ}\sigma_Z - \sigma_X}^{\infty} \Phi \left( \frac{\frac{\mu_Z}{\sigma_Z} + \rho_{XZ}x + \rho_{XZ}\sigma_X + \sigma_Z}{\sqrt{1 - \rho_{XZ}^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} dx$$

$$- K \bar{P} \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S'_t}\right) - \mu_X}{\sigma_Z} - \rho_{XZ}\sigma_Z}^{\infty} \Phi \left( \frac{\frac{\mu_Z}{\sigma_Z} + \rho_{XZ}x + \sigma_Z}{\sqrt{1 - \rho_{XZ}^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} dx$$

$$\begin{aligned}
& + S'_i \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S'_i}\right) - \mu_{RIS}}{\sigma_Z} - \sigma_{IS}}^{\infty} \Phi\left(\frac{-\frac{\mu_{RI\pi}}{\sigma_{I\pi}} - \rho_{ISI\pi}x - \rho_{ISI\pi}\sigma_{IS}}{\sqrt{1 - \rho_{ISI\pi}^2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \\
& - K \int_{\frac{\ln\left(\frac{K}{S'_i}\right) - \mu_{RIS}}{\sigma_Z}}^{\infty} \Phi\left(\frac{-\frac{\mu_{RI\pi}}{\sigma_{I\pi}} - \rho_{ISI\pi}x}{\sqrt{1 - \rho_{ISI\pi}^2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx
\end{aligned} \tag{5}$$

ここで,  $S'_i = S_i + f(t, T)$  であり, その他の記法は(パート 1)に同じである.

(証明) Ito and Miyazaki(2008)を参照されたい.

インフレデリバティブを発行価格  $f(t, T)$  で発行した後の社債価値  $F'_i(t, T)$  の導出法

社債価値以外の全ての価値(株式価値  $W'(t, T)$  とインフレデリバティブの価値  $f'(t, T)$  の和となる  $W''(t, T)$ ) を求め, これを企業価値  $S_i$  とインフレデリバティブの発行価格  $f(t, T)$  との和

( $S'_i = S_i + f(t, T)$ ) から差し引くことで求められる.

$$F'_i(t, T) = S'_i - W''(t, T) = S_i + f(t, T) - W''(t, T) \tag{6}$$

社債価値以外の全ての価値  $W''(t, T)$  を求めるには, その満期におけるペイオフが  $(\tilde{S}_T - K)^+$  であることから, このペイオフにプライシングカーネルを乗じて期待値を取ればよい. つまり, 式(8)を評価すればよい.

$$W''(t, T) = E\left[\frac{M_T/M_t}{\Pi_T/\Pi_t} (\tilde{S}_T - K)^+\right] \tag{7}$$

式(8)の評価は単に, (パート 1)の式(6)の株式価値  $W(t, T)$  評価式において,  $S_i$  を  $S'_i = S_i + f(t, T)$  に置き換えさえすれば良い.

デフォルト有インフレデリバティブの真の価値  $f'(t, T)$

この価値は, 企業価値  $S_i$  とインフレデリバティブの発行価格  $f(t, T)$  との和 ( $S'_i = S_i + f(t, T)$ ) から, インフレデリバティブを発行価格  $f(t, T)$  で発行した後の株式価値  $W'(t, T)$  と社債価値  $F'_i(t, T)$  を差し引くことで求められる. これは, インフレデリバティブを発行価格  $f(t, T)$  で発行した後の社債価値以外の全ての価値 ( $W''(t, T)$ ) から株式価値  $W'(t, T)$  を引いたものに同じである.

$$f'(t, T) = S'_i - W'(t, T) - F'_i(t, T) = W''(t, T) - W'(t, T) \tag{8}$$

### 3.2 デフォルト有インフレデリバティブの感応度分析

デフォルト無インフレデリバティブの価格で企業がインフレデリバティブを発行する場合のデフォルトリスクプレミアム ( $dp(t,T)$ ) 及び株式価値の変化 ( $\Delta W(t,T)$ ) の相関係数  $\rho_{S\pi}$  に対する感応度分析結果をそれぞれ図 7, 図 8 に示した。

#### 分析結果

図 7 から, 相関係数  $\rho_{S\pi}$  の相関が負で大きい場合に  $dp(t,T)$  が大きな値を取り, 相関が 0 から正になる辺りでは  $dp(t,T)$  は 0 に近いことがわかる。また, 図 8 から, 相関係数  $\rho_{S\pi}$  が正の部分に着目すると  $\Delta W(t,T)$  の値が僅かではあるが負となっていることがわかる。

#### 分析結果の考察

相関係数  $\rho_{S\pi}$  が負で大きい場合には, インフレが大きくなる場合 ( $\pi$  が大きくなる) に, 企業価値  $S(t,T)$  が小さくなる。インフレが大きくなる際には, インフレデリバティブがイン・ザ・マネーとなり価値が生じる場合である。このとき, 企業価値  $S(t,T)$  が小さくなる方向に動くことは, デフォルトの可能性が高くなることを意味する。インフレデリバティブの発行価格としてデフォルト無インフレデリバティブの価格を採用しているため, このデフォルトプレミアムが大きく反映されて  $dp(t,T)$  が大きな値になったと考えられる。

図 8 の相関係数  $\rho_{S\pi}$  が正の部分に着目すると  $\Delta W(t,T)$  の値が僅かではあるが負の値となっており, これは, デフォルト無インフレデリバティブの価格では株式保有者の誘引両立条件を満たすことができないため, 実際にインフレデリバティブを発行することができないことを意味する。相関係数  $\rho_{S\pi}$  が正の場合には, インフレが大きくなる場合 ( $\pi$  が大きくなる) に, 企業価値  $S(t,T)$  が大きくなる方向に動き, デフォルトの可能性が低くなることを意味する。よって, 相関係数  $\rho_{S\pi}$  が正で大きい場合には, デフォルトリスクプレミアム  $dp(t,T)$  は小さく, 債券価値の増分  $\Delta F(t,T) \geq 0$  は常に見込まれることから, 株式価値の減少  $\Delta W(t,T) < 0$  が生じたものと考えられる。

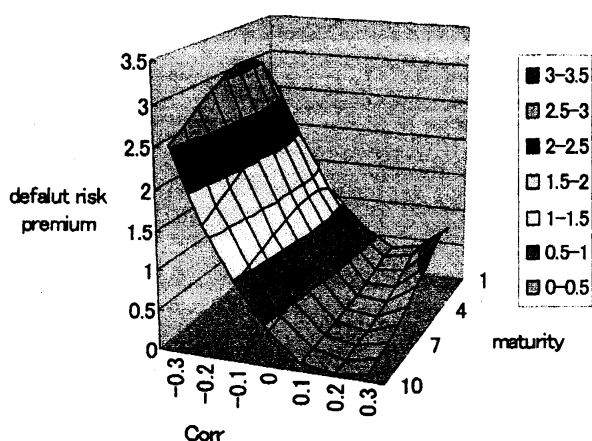


図 7 デフォルトリスクプレミアム

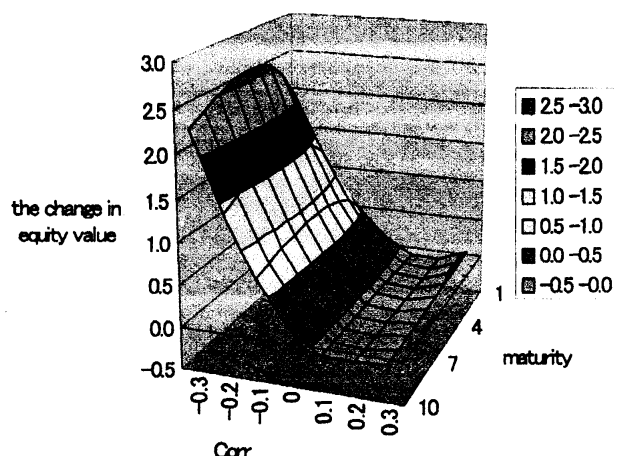


図 8 株式価値の差



#### 4. まとめと今後の課題

本研究では、BX のモデルの枠組みにおいて、名目社債、インフレ連動国債、インフレ連動社債の解析的評価式を導出し、更に、クレジット・スプレッドの解析的評価式やデフォルトの可能性の無いインフレデリバティブ及び発行可能性も考慮したデフォルトリスクを前提としたインフレデリバティブの評価式も導出した。BX のパラメータセットに基づく、相関構造（企業価値、インフレ、実質金利）に関するクレジット・スプレッドやインフレデリバティブなどの感応度分析から得られたインプリケーションとしては、収益構造がインフレと正の相関（ $0 \sim +0.3$ ）がある企業は、相関が負（ $0 \sim -0.3$ ）の企業よりもインフレ連動社債やインフレデリバティブを発行するインセンティブが高くなることである。

今後の課題としては、データの蓄積がすすむのを待って、インフレデリバティブの最終的な提供者（引き受けて者）の財務構造とインフレデリバティブの価格に関する実証的な分析を試み、モデルをより現実的なものへと改良することが挙げられる。

謝辞：本研究を行うに際して、著者の宮崎浩一は（財）全国銀行学術研究振興財団からの研究助成を受けている。

#### 参考文献

- Black, F., and J. Cox. "Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions." *Journal of Finance*, 31 (1976), pp. 351-367.
- Brennan, M. J., and Xia, Y. "Dynamic Asset Allocation under Inflation." *The Journal of Finance*, No3. (2002), pp. 1201-1238.
- Geske, R. "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12 (1977), pp. 541-552.
- Ito, S., and Miyazaki, K. "Valuation Models of Inflation Derivatives using Pricing Kernel." *Working Paper The University of Electro-Communications*, (2008)
- Merton, R. C. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates." *The Journal of Finance*, 29 (1974), pp. 449-470.
- Miyazaki, K. "Inflation Risk and Correlation Risk Matter in the Valuation of Credit Spread." *Working Paper The University of Electro-Communications*, (2008)
- Roll, R. "U.S. Treasury Inflation-Linked Bonds: The Design of A New Security." *The Journal of Fixed Income*, 6 (1996), pp. 9-28.
- Shimuko, D., Tejima, N., and Deventer, D. R. V. "The Pricing of Risky Debt When Interest Rates are Stochastic." *The Journal of Fixed Income*, 3 (1993), pp. 58-65.
- Zhou, C. "A Jump-Diffusion Approach to Modeling Credit Risk and Valuing Defaultable Securities." Working paper, Federal Reserve Board, 1997.